Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

04/10/2016

Στόχος (Α.Λ. ΙΙΙ και ΙV): Μελέτη συναρτήσεων

$$\mathbb{R}^n \supset U \ni \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$n, m \in \mathbb{N}$

Με τέτοιες συναρτήσεις μπορούμε να περιγράψουμε επιφάνειες, καμπύλες, διανυσματικούς χώρους κτλ.

Το βασικότερο και με το οποίο θα αρχίσουμε είναι συναρτήσεις πραγματικές (δηλαδή με $m = 1$) και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Ορισμοί: ① $U \subset \mathbb{R}^n$ πεδίο ορισμού της $\bar{f}$

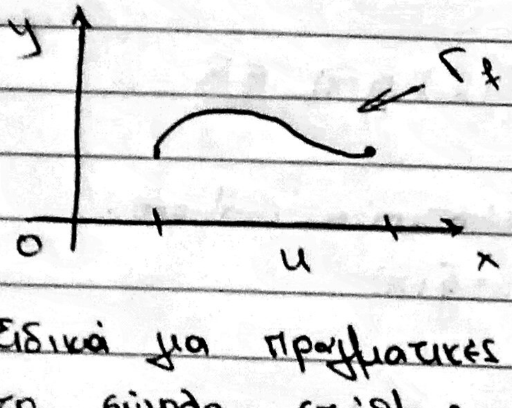
② οι πραγματικές συναρτήσεις $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ ονομάζονται συνιστώσες της $\bar{f}$.

③ $\bar{f}(U) = \{\bar{f}(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}$ είναι η εικόνα της $\bar{f}$ $\Rightarrow \bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$

④ Γράφημα της $\bar{f}$: $\Gamma_{\bar{f}} = \{(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x})) : \bar{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$

(πχ) $n = m = 1$

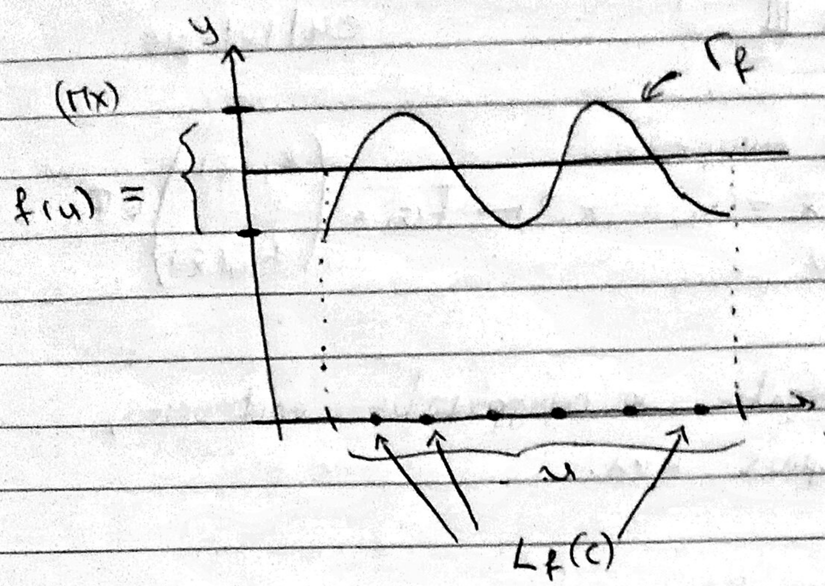
$\Gamma_f = \{(x, f(x) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^2$



⑤ Ειδικά για πραγματικές συναρτήσεις ($m = 1$) θεωρούμε το σύνολο στάθμης $c \in \mathbb{R}$:

$$L_f(c) = \{\bar{x} \in U : f(\bar{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

δηλαδή η αντίστροφη εικόνα $[f^{-1}(\{c\})]$



(*) το σύνολο στάθμης θα το μελετάμε κυρίως για πραγματικές συναρτήσεις.

→ Για $n=m=1$

⑥ Έστω $\bar{f},\bar{g}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$

(α) $\bar{f}+\bar{g}: U \to \mathbb{R}^m$, $(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})+\bar{g}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$

(β) $(\alpha \in \mathbb{R})$ $\alpha\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $(\alpha\bar{f})(\bar{x}) = \alpha\bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$

(γ) Σύνθεση συναρτήσεων:
έστω $\bar{h}: V \to \mathbb{R}^k$ με $\bar{f}(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$,
τότε ορίζεται η σύνθεση της $\bar{f}$ με την $\bar{h}$:
$\bar{h}\circ\bar{f}: U \to \mathbb{R}^k$ με $(\bar{h}\circ\bar{f})(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{f}(\bar{x}))$

(δ) Αν $m=1$ (δηλ. έχω πραγματικές συναρτήσεις), τότε ορίζεται:
$$(f\cdot g)(x) = f(\bar{x})\cdot g(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

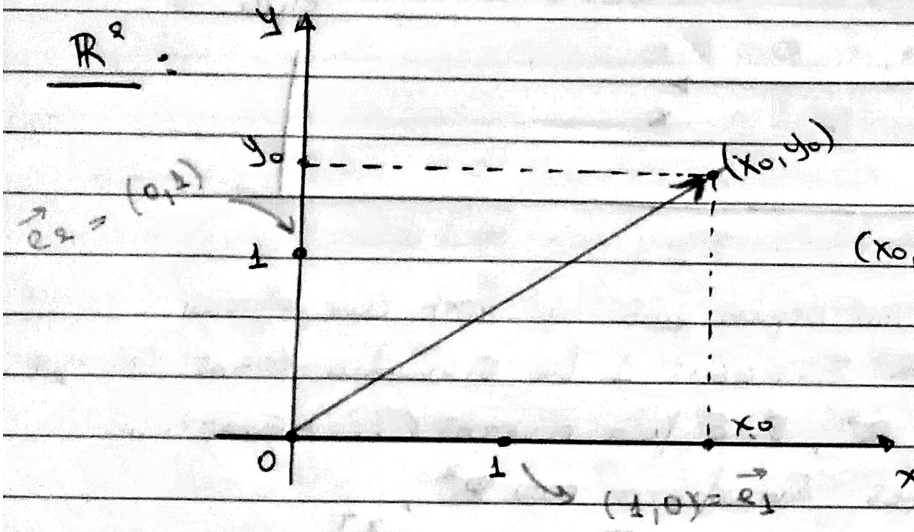
(ε) Μπορώ να ορίσω εσωτερικό γινόμενο:
$$(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})\cdot\bar{g}(\bar{x})$$

Πριν συνεχίσουμε με τη μελέτη συναρτήσεων, λίγα πράγματα (υπενθύμιση) για τον $\mathbb{R}^n$ (από την άποψη της Αναλυτικής Γεωμετρίας και της Γραμμικής Άλγεβρας).

$\mathbb{R}^1$:

*** Στα διανύσματα δεν έχω διάταξη, αλλά αν περάσω στους πραγματικούς έχω

$\mathbb{R}^2$:



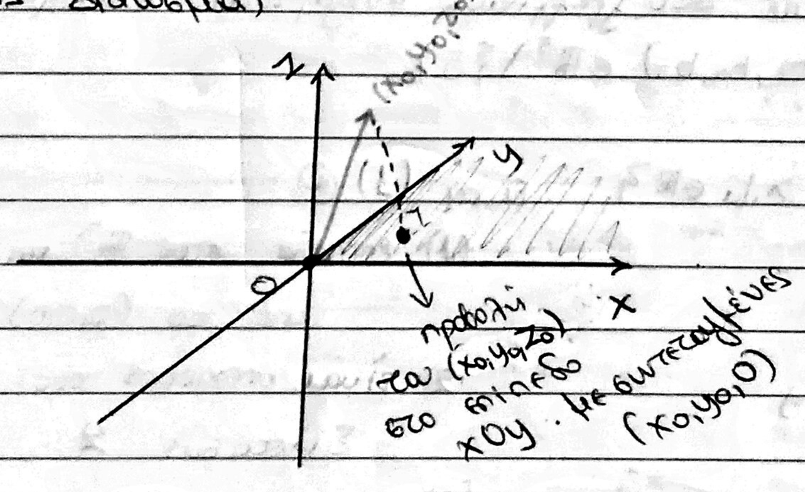
$(x_0,y_0) = x_0 \cdot (1,0) + y_0 (0,1) =$

$= x_0 \cdot \bar{e}_1 + y_0 \cdot \bar{e}_2$

Υπάρχει για κάθε σημείο (x_0,y_0) του $\mathbb{R}^2$ ∃ ένα διάνυσμα (x_0,y_0) και μόνο αυτό.

Δηλαδή, για τον $\mathbb{R}^2$ έχουμε μία 1-1 και επί αντιστοίχιση σημείων με διανύσματα (άλλοτε θα βλέπουμε κάτι ως σημείο και άλλοτε ως διάνυσμα)

$\mathbb{R}^3$:



***

$x = x_0$:

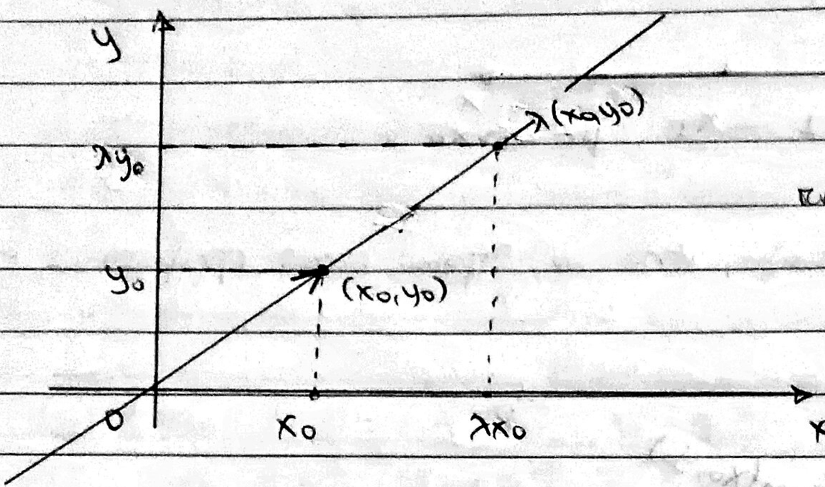
στον $\mathbb{R}^2$ ευθεία

στον $\mathbb{R}^3$ επίπεδο

στον $\mathbb{R}^4$ υπερεπίπεδο.

Παράδειγμα σχέσης Αναλυτικής Γεωμετρίας
και Απει III.

Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



Τότε, το σύνολο

$$L = \{\lambda(x_0, y_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

καθορίζεται ως:

$$\lambda(x_0, y_0) = (\lambda x_0, \lambda y_0)$$

είναι:

(1) μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ που περνάει από την αρχή των αξόνων

(2) ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ διάστασης 1 με διάνυσμα βάσης (x_0, y_0)

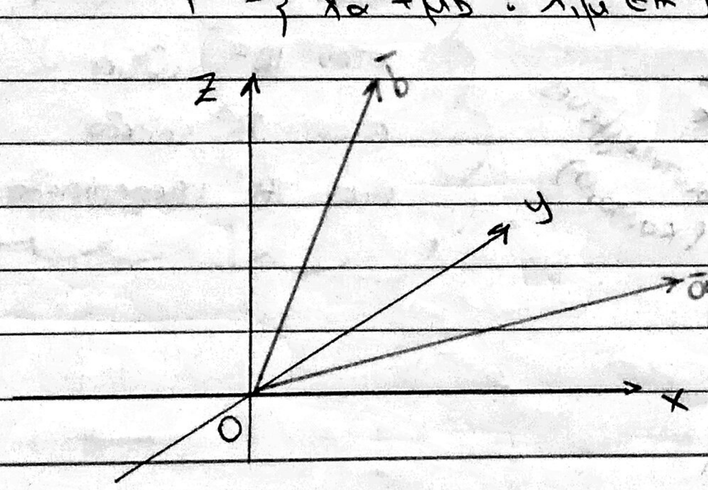
(3) μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$, δηλ. μια συνεχής (???) συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$ με τιμές διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$,

$$\bar{\gamma}(\lambda) = \lambda(x_0, y_0),\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad [\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2].$$

Αντίστοιχα στον $\mathbb{R}^3$, έστω δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα
$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$
Τότε το σύνολο

$$P = \{\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

είναι:



(1) Επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από το $(0,0,0)$

(2) ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2

(3) Μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$
$P = \bar{\Phi}(\mathbb{R}^2)$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$\bar{\Phi}(\lambda, \mu) = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \in \mathbb{R}^3$

<u>Ορισμός</u>: Ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι:
ο διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος διάστασης n, με στοιχεία διανύσματα $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, όπου $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$ είναι οι συντεταγμένες του $\bar{x}$ ως προς τη συνήθη βάση $\bar{e}_1=(1,0,\dots,0)$, ..., $\bar{e}_n=(0,0,\dots,1)$ και είναι εφοδιασμένος με τις πράξεις:

1. Την <u>πρόσθεση</u> $+ : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$$\bar{x}+\bar{y}=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=$$
$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

2. Τον <u>βαθμωτό πολλαπλασιασμό</u>

$$a\cdot\bar{x}=a(x_1,x_2,\dots,x_n)=$$
$$=(ax_1,ax_2,\dots,ax_n)\text{ για } a\in\mathbb{R}.$$

Και τις γνωστές ιδιότητες (αξιώματα) των πράξεων αυτών (οι οποίες προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες του $\mathbb{R}$).

πχ • η (αντι)μεταθετική ιδιότητα

$$\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)=$$
$$=(y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n)$$

• με μηδενικό (ουδέτερο ως προς +) στοιχείο

$$\bar{0}=(0,0,\dots,0)$$

• Αντίθετο του $\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ είναι το

$$-\bar{x}=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$$

άρα $\bar{x}+(-\bar{x})=(x_1-x_1,x_2-x_2,\dots,x_n-x_n)=$
$$=(0,0,\dots,0)$$

... κλπ...

Διάβασμα εβδομάδας (με Ασκήσεις)

ΓΓ: 1.1, 1.2 } από τα βιβλία

ΗΤ: 1.1, 1.2, 1.5

Ο $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις αυτές γίνεται ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n.

Στον $\mathbb{R}^n$ μπορεί να ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο (το κανονικό)

$\forall \bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$\bar{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R} = \langle \bar{x},\bar{y}\rangle$$

δηλαδή μια πράξη με τις ιδιότητες : $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

(α) $\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{y}\cdot\bar{x}$

(β) γραμμικότητα (ως προς το πρώτο όρισμα)

$$(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y})\cdot\bar{z} = \alpha(\bar{x}\cdot\bar{z})+\beta(\bar{x}\cdot\bar{z}) \quad , \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

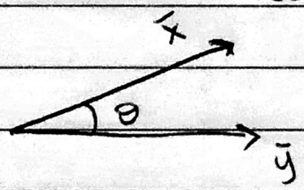
(γ) Θετικά ορισμένο: $\bar{x}\cdot\bar{x}\geq 0 \ \forall \bar{x}\in\mathbb{R}$ και $\bar{x}\cdot\bar{x}=0 \Rightarrow \bar{x}=\bar{0}$

(πχ). $\bar{x}\cdot\bar{x}=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2=0 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=0$

με $x_1,x_2,\dots,x_n \geq 0$

Παρατήρηση: Αν $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ και θ η (μη προσανατολισμένη) οξεία γωνία (δλδ $\theta\in[0,\pi]$) μεταξύ των $\bar{x}$ και $\bar{y}$ (στο επίπεδο που παράγεται από αυτά) ισχύει:

$$\cos\theta = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}, \text{ όπου } \|\bar{x}\|^2=\bar{x}\cdot\bar{x}$$



$$\hookrightarrow \cos\theta = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\cdot\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$$